量子力学 II 演習 問題 (第 2回)

樋口 さぶろお*

1998 年 4 月 22 日

交換子

演算子 A, B, C を考える. 例えば, $\frac{d}{dx}$ (x に関する微分), x (関数を x 倍する), 1 (恒等演算子) などは演算子である. 任意の関数 $f(x)$ に対して

$$ABf(x) - BAf(x) = Cf(x).$$

がなりたつとき, $C = [A, B]$ とかき, $[A, B]$ を交換子という. つまり $[A, B]f(x) := ABf(x) - BAf(x)$.

[2-1]　交換子の代数

1. 演算子 $[x, \frac{d}{dx}]$ を求めよ.
2. 演算子 A, B を

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} - x\right)$$

と定義する. 次を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{関数} \quad & B(x\exp(-x^2/2)), \\ \text{関数} \quad & (2AB+1)\exp(-x^2/2), \\ \text{演算子} \quad & [A, B], \\ \text{演算子} \quad & [A, B^2]. \end{aligned}$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

[2-2] 調和振動子

位置, 運動量演算子をそれぞれ x, p ($[x,p] = i\hbar$, あるいは $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ と思ってもよい) とするとき, 調和振動子の Hamiltonian は,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である $(m, \omega \in \mathbb{R})$. 昇降演算子 $b, b^\dagger$ を

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - (im\omega)^{-1}p), \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + (im\omega)^{-1}p)$$

と定義する.

1. 式 $H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega/2$ を示せ (x, p が非可換であることに注意).
2. 交換子 $[b, b^\dagger]$ を求めよ.

[2-3] 角運動量代数

3 次元の座標演算子 $x_i \quad (i = 1,2,3)$, 運動量演算子 $p_i \quad (i = 1,2,3)$ は, 正準交換関係

$$[x_i, p_j] = +i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

を満たす. 角運動量演算子 $L_i \quad (i = 1,2,3)$ は

$$L_1 := x_2 p_3 - x_3 p_2, \qquad L_2, L_3 \text{は, その cyclic permutation.}$$

と定義される.

1. 全角運動量演算子を $\mathbf{L}^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ と定義する. 交換子 $[L_1, L_2], \quad [\mathbf{L}^2, L_3]$ を求めよ.
2. $L_\pm := L_1 \pm \sqrt{-1}L_2$ と定義する. $[L_\pm, L_3], [L_+, L_-]$ を求めよ.

Hint. 添字の対称性をうまく利用すると簡単になる.