量子力学 II 演習 問題 (第 6回)

樋口 さぶろお*

1998年5月27日

[6-1] Hermite 演算子の固有値, 固有状態

1. 演算子 A が Hermite であるということの定義を書け.
2. Hermite 演算子 A の固有値は実数であることを示せ.

Hint. 演算子 A の固有状態 $|\phi\rangle$ を考える: $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$. 固有値 $a = \langle\phi|A|\phi\rangle$ が a^* に等しいことをいえばよい.

3. Hermite 演算子 A の, 異なる固有値に属する固有状態はたがいに直交することを示せ.

Hint. 2つの固有状態 ϕ_1, ϕ_2 を考える: $A|\phi_1\rangle = a_1|\phi_1\rangle, A|\phi_2\rangle = a_2|\phi_2\rangle, a_1 \neq a_2$. 行列要素 $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle$ を評価するときに, A を $\langle\phi_1|$ に作用させてもよいし, $|\phi_2\rangle$ に作用させてもよい.

[6-2] 時間推進演算子

時刻 t での波動関数を $\Psi(t)$ とかく. 異なる時刻の波動関数は, ある Hermite 演算子 A により,

$$\Psi(t) = U(t-t_0)\Psi(t_0) \equiv \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)A}\Psi(t_0) \tag{1}$$

で関係づけられる.

1. $U(t_1)U(t_2) = U(t_1+t_2), U(0) = 1$ を納得せよ.
2. 式 $U(t)^\dagger = U(t)^{-1} = U(-t)$ すなわち $U(t)$ が unitary 演算子であることを示せ. 可換な演算子 A, B に対して $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$ であることは, つかってよい.

*`hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

3. 波動関数 $\Psi(t) = U(t-t_0)\Psi(t_0)$ が, 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = A\Psi \tag{2}$$

を満たすことを示せ. すなわち, 上に現れた A は, Hamiltonian そのものである.

[6-3] Heisenberg 表示

(今まで使ってきた) Schrödinger 表示では, 時刻に依存する状態 $|\Psi(t)\rangle$ と時刻に依存しない演算子 A により, 時刻 t における期待値が$\langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle = \left\langle\Psi(t_0)U(t-t_0)^\dagger|A|U(t-t_0)\Psi(t_0)\right\rangle$ とかかれた.

一方, Heisenberg 表示とは, $|\Psi(t_0)\rangle$ を時刻に依存しない状態, $U(t-t_0)^\dagger AU(t-t_0)$ を時刻に依存する演算子と見る表示のことをいう.

1. 演算子 $A(t)$ のしたがう運動方程式

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] \tag{3}$$

を示せ.

2. Hamiltonian $H = p^2/(2m)$ で表される 1 次元の自由粒子について, 位置演算子 x, 運動量演算子 p の Heisenberg 表示$x(t), p(t)$ を $x(0), p(0)$ で表せ.

[6-4] 運動量表示の波動関数

規格化された波動関数

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dp\phi(p)\exp(ipx/\hbar) \tag{4}$$

を考える. 式 (4) は, $\psi(x)$ を運動固有状態の重ね合わせで書いたとも見られる. その意味で関数 $\phi(p)$ を, 波動関数 ψ であらわされる状態の, 運動量表示の波動関数という.

1. 運動量の期待値 $\langle\psi|-i\hbar(d/dx)|\psi\rangle$ を (p の一重積分の形に) 求めよ.
Hint 先に x-積分を実行する.
2. 位置の期待値 $\langle\psi|x|\psi\rangle$ を (p の一重積分の形に) 求めよ.

Hint 被積分関数の中の x を d/dp などで書き直せないか.

3. 位置表示の波動関数 $\psi_k(x) = \exp(ikx)$ を運動量表示にせよ.
4. 式 (4) は, 運動量固有状態を $|p\rangle$ とかいたとき,

$$|\psi\rangle = \sum_p \langle p|\psi\rangle p \tag{5}$$

あるいは,

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_p \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle \tag{6}$$

と読めることを納得せよ. ただし, $\langle p|\psi\rangle = \phi(p)$. 状態 $|x\rangle$ は波動関数 $\Psi(y) = \delta(y-x)$ に対応する状態.

上の過程で, おそらく, δ-関数の積分表示

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(ipx) \tag{7}$$

および δ-関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0) \quad (f \text{ は任意の関数}) \tag{8}$$

を用いることになるだろう.