量子力学 II 演習 問題 (第 7回)

樋口 さぶろお*

1998年6月3日

[7-1] 角運動量代数

3次元の座標演算子 $x_i \quad (i=1,2,3)$, 運動量演算子 $p_i \quad (i=1,2,3)$ は, 正準交換関係

$$[x_i, p_j] = +i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

を満たす. 角運動量演算子 $L_i \quad (i=1,2,3)$ は

$$L_1 := x_2 p_3 - x_3 p_2, \qquad L_2, L_3 \text{は, その cyclic permutation.}$$

と定義される.

1. 演算子 L_i が hermitian であることを示せ. 演算子 x_i, p_j は hermitian であるとしてよい.
2. 全角運動量演算子を $\mathbf{L}^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ と定義する. 交換子 $[L_1, L_2], \quad [\mathbf{L}^2, L_3]$ を求めよ.
3. $L_\pm := L_1 \pm \sqrt{-1} L_2$ と定義する. $[L_\pm, L_3], [L_+, L_-]$ を求めよ.

Hint. 添字の対称性をうまく利用すると簡単になる.

[7-2] 角運動量演算子の固有状態

角運動量演算子 L_1, L_2, L_3 は, $L_1 := x_2 p_3 - x_3 p_2$ などと定義されるのだった. ここでは, 定数倍だけ変更した演算子 M_i を $L_i = \hbar M_i$ として導入する. 演算子 $\mathbf{M}^2 := M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ とする.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

1. $M_\pm = M_1 \pm iM_2$ (複号同順) と定義する. 関係 $M_+^\dagger = M_-$ を示せ. 交換子 $[M_\pm, \mathbf{M^2}], [M_\pm, M_3]$ を求めよ.
2. $[\mathbf{M}^2, M_3] = 0$ なので, $\mathbf{M}^2, M_3$ は同時対角化可能. これらの同時固有関数を ψ_{jm} と書く. ただし, 固有値は,

$$\mathbf{M}^2\psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm}, \quad M_3\psi_{jm} = m\psi_{jm}.$$

である. 式

$$M_\pm\psi_{jm} \propto \psi_{j\ m\pm1}$$

を示せ.

Hint. 調和振動子の昇降演算子のときの証明と同じ方法. 波動関数 $M_\pm\psi_{jm}$ が, $\mathbf{M}^2$, M_3 の固有値 $j(j+1), m\pm1$ の固有関数であることを示す. それには $\mathbf{M}^2, M_3$ を作用させて, 交換関係を用いて計算すればよい.

Remark. 正しい規格化を行なうと

$$M_\pm\psi_{jm} = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\ \ \psi_{j\ m\pm1} \tag{1}$$

である. これを示すには, $M_+^\dagger = M_-$ などを用いる.

[7-3] 角運動量演算子の表現行列

角運動量を考える. $\mathbf{L} = \hbar\mathbf{M}$. 基底として, $\mathbf{M}^2, M_3$ の同時固有関数系をとる.

1. $j = 1/2$ の部分空間, すなわち, $\mathbf{M}^2$ の固有値 $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)$ の固有空間に限って考える. $\mathbf{M}^2, M_3, M_\pm, M_1, M_2$ の表現行列を求めよ.
2. $j = 1$ の部分空間, すなわち, $\mathbf{M}^2$ の固有値 $1(1+1)$ の固有空間に限って考える. $\mathbf{M}^2, M_3, M_\pm, M_1, M_2$ の表現行列を求めよ.

[7-4] 球関数

極座標をとる:

$$x = r\sin\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

演算子 M_3, $\mathbf{M}^2$ の同時固有関数の $\psi_{jm}(r,\theta,\phi)$ で, $j\to j, m\to -j$ としたもの$\psi_{j\ -j}(r,\theta,\phi)$ を考える. 次の手順で, $\psi_{j\ -j}(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ とかいたときの球関数 $Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ を具体的に求めよ. 以下, 規格化は暇と興味のある人だけ気にすればよい.

1. $Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ が θ と ϕ に変数分離されるとして, ϕ-依存性を, $M_3 Y_{j\ -j} = -jY_{j\ -j}$ から決めよ.

Hint. $M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$.

2. 式 (1) より $M_-\psi_{j\ -j} = 0$ となる. これを解いて $Y_{j\ -j}$ の θ-依存性を決めよ. ただし, $M_\pm$ は

$$M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

という表示を持つことを使ってよい.

3. $Y_{j\ (1-j)}(\theta,\phi)$ を求めよ.