量子力学 II 演習 問題 (第 11回)

樋口 さぶろお*

1998 年 7 月 8 日

お知らせ

- この演習の評価は, 毎週の提出物で行ないます.
- 7 月 27 日までに成績に関する掲示を行ないます. 成績についての疑問, 質問, (場合によっては) 追加レポートについての相談は 7 月 31 日までにお願いします.
- 7 月 15 日は出張のため休講にさせていただきます. 7 月 22 日が最終回です.
- 補講は行ないませんが, 質問の時間を設けます.
  - 7 月 21 日 18h00–19h30
  - 7 月 23 日 18h00–19h30

  量子力学についての質問なら, 演習で出題したものに限りません (ただし, わかるものについてしか答えられません). 上の時刻に研究室 16-809B までどうぞ.
- 他の日時に質問に来てくれてもかまいません. 上でいっているのは, これらの時間帯には確実に時間が空いているということです.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

電磁場中の荷電粒子

電場 $\mathbf{E}$, 磁場 $\mathbf{B}$ 中の電荷 q の粒子の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + q\phi(\mathbf{x}) \tag{1}$$

で与えられる. ただし, c は光速度. スカラー場 ϕ は 電場を表す静電ポテンシャル: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. ベクトル場 $\mathbf{A}$ は磁場を表すベクトルポテンシャル: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

量子力学では, 上の $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$ が演算子に置き換わったと考えればよい. ただし, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の $\mathbf{x}$ も $\mathbf{p}$ と非可換であることに注意.

[11-1] Lorentz 力

上の状況を考える. Heisenberg 描像をとる. 演算子 O_t は時間に依存し, 運動方程式

$$\frac{dO_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[O_t, H] \tag{2}$$

に従って時間発展する.

1. 演算子 $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ に対して,

$$m\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \tag{3}$$

   を示せ. $\mathbf{p}$ を正準運動量, $\mathbf{\Pi}$ を力学的運動量とよんだりして区別する.
2. 交換関係

$$[\Pi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \Pi_j(\mathbf{x}, \mathbf{p})] = (i\hbar q/c)\epsilon_{ijk}B_k(\mathbf{x}) \tag{4}$$

   を示せ. ϵ_{ijk} は完全反対称 tensor.
3. Lorentz 力の入った, 演算子に対する量子力学的運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = q\left[\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\right] \tag{5}$$

   を示せ.

[11-2]　ゲージ変換

上の状況で, 静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}) = 0$ とする. ベクトルポテンシャルにゲージ変換 $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$ を施しても, 磁場 $\mathbf{B}$ には変化がない. ただし $\chi(\mathbf{x})$ は実スカラー関数.

1. 交換関係
$$\left[\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \exp\left[i\frac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]\right] = \frac{q}{c}\nabla\chi(\mathbf{x})\mathrm{e}^{i\frac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})}$$
を示せ.
2. $\psi(\mathbf{x})$ を, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のもとでの, 固有値 E の Hamiltonian の固有関数とする. ゲージ変換されたベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$ のもとでは,
$$\psi'(\mathbf{x}) = \exp\left[i\frac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x}) \tag{6}$$
が Hamiltonian の固有関数となり, 固有値は同じ E であることを示せ.

Remark. 物理を変えないゲージ変換のもとで, 波動関数は位相だけ変化する.

[11-3]　Zeeman 効果

3 次元空間の質量 m, 電荷 q の粒子を考える. 中心力ポテンシャル $V(r)$ と, z 軸方向の一様な磁場のみがあるとする. すなわち, 電場 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B\mathbf{e}_z$.

1. ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$ は, この磁場を表すことを示せ.
2. $\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{p} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}BL_z$ を示せ. ただし L_z は z 方向の角運動量.
3. Hamiltonian が
$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(r) - \frac{q}{2mc}BL_z + \frac{q^2}{8mc^2}B^2(x^2 + y^2) \tag{7}$$
であることを示せ.
4. $B = 0$ のとき, 全角運動量演算子 $\mathbf{L}^2$ の固有値 $\ell(\ell+1)\hbar^2$ の固有状態は, $(2\ell+1)$ 重に縮退している. 磁場 B が加わったとき, この縮退はどのようにとけるか. 縮退のある場合の (B についての) 1 次の摂動

論を用いて議論せよ. ただし, ∇^2 の極座標表示は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\mathbf{L}^2 \tag{8}$$

[11-4] Zeeman 効果

3 次元空間の質量 m, 電荷 q の粒子を考える. z 軸方向の一様な磁場のみがあるとする. すなわち, 電場 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B\mathbf{e}_z$.

1. 交換関係 $[\Pi_x, \Pi_y]$ を求めよ.
2. Hamiltonian と, Π の間の交換関係は

$$H = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2\right) + \frac{1}{2m}\Pi_z^2, [\Pi_x, \Pi_y] = \text{定数}, \quad \text{others} = 0.$$

である. x, y 方向と z 方向を別々に考えられる. この $\Pi_x^2 + \Pi_y^2$ の部分は, 1 次元の調和振動子

$$H = x^2 + p^2, \qquad [x, p] = \text{定数}, \quad \text{others} = 0. \tag{9}$$

と似ている. このことを利用して, エネルギー固有値が

$$E_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{|qB|\hbar}{cm}\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_z \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

とかけることを説明せよ.