

量子力学 II 演習問題 (第7回)

樋口 さぶろお*

1999年6月10日

[7-Q1] Hermitian operators

演算子 A, B が, 任意の波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対し, 式

$$\langle \psi | A | \phi \rangle = \langle \phi | B | \psi \rangle^* (\equiv \langle B \psi | \phi \rangle) \quad (1)$$

を満たすとき, B を A の Hermitic 共役演算子といい, $B = A^\dagger$ とかく. $A = A^\dagger$ のとき, A は Hermitic 演算子であるという. $A = -A^\dagger$ のとき, A は反 Hermitic 演算子であるという.

1. 演算子 A と数 (定数倍演算子) $a \in \mathbb{C}$ に対して, $(aA)^\dagger = a^* A^\dagger$ であることを示せ.
2. A が Hermitic 演算子, a が実数 [純虚数] のとき, aA は Hermitic [反 Hermitic] 演算子であることを示せ.
3. A, B が Hermitic 演算子のとき, $\{A, B\} := AB + BA$ は Hermitic 演算子. $[A, B] := AB - BA$ は反 Hermitic 演算子であることを示せ. 一般の演算子 A, B に対して $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ が成立することをういてよい.
4. 演算子 $x, p = -i\hbar(d/dx), H = \frac{p^2}{2m}$ が hermitian であることを示せ.

Hint. これらの演算子に作用される波動関数 $\psi(x)$ は, 規格化可能で $|x| \rightarrow \infty$ で $\psi(x) \rightarrow 0$ であるとする.

5. 時間と興味のある人は $(A^\dagger)^\dagger = A, (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を示せ.

[7-Q2] Hermite 演算子の固有値, 固有状態

1. Hermitic 演算子 A の固有値は実数であることを示せ.

Hint. 演算子 A の固有状態 $|\phi\rangle$ を考える: $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$. 固有値 $a = \langle \phi | A | \phi \rangle$ が a^* に等しいことをいえばよい.

2. 反 Hermitic 演算子の固有値は純虚数であることを示せ.
3. Hermitic 演算子 A の, 異なる固有値に属する固有状態はたがいに直交することを示せ.

Hint. 2つの固有状態 ϕ_1, ϕ_2 を考える: $A|\phi_1\rangle = a_1|\phi_1\rangle, A|\phi_2\rangle = a_2|\phi_2\rangle, a_1 \neq a_2$. 行列要素 $\langle \phi_1 | A | \phi_2 \rangle$ を評価するときに, A を $\langle \phi_1 |$ に作用させてもよいし, $|\phi_2\rangle$ に作用させてもよい.

4. Hermitic 演算子の表現行列は Hermitic 行列になるということを示せ.

[7-Q3] 演算子の表現行列

周期的境界条件 $\psi(0) = \psi(L)$ の課せられた 1次元空間 $0 \leq x \leq L$ に自由粒子が閉じ込められている. 規格化された波動関数の族

$$\psi_n(x) = L^{-1/2} e^{2n\pi i x / L} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

を考える.

1. 自由粒子の Hamiltonian の表現行列 $\langle \psi_m | p^2 / 2m | \psi_n \rangle$ を求めよ.
2. 運動量演算子の表現行列 $\langle \psi_m | p | \psi_n \rangle$ を求めよ.
3. 座標演算子の表現行列 $\langle \psi_m | x | \psi_n \rangle$ を求めよ.
4. 規格化された波動関数 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_1(x) + \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_{-2}(x)$ を考える. $\{\psi_n\}$ を基底にしたとき, ϕ はどのようなベクトルで表されるか.
5. 内積 $\langle \psi_1 | \phi \rangle$, 期待値 $\langle \phi | p^4 | \phi \rangle$, $\langle \phi | xp | \phi \rangle$ を, 行列を用いて計算せよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,

へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735