

量子力学 II 演習問題 (第 2 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 10 月 24 日

[2-1] 角運動量の合成

Spin $1/2$ を持つ 2 つの fermion $i = 1, 2$ があり, その spin 演算子を $S_i = (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz})$ とかく. S_i^2 と S_{iz} の同時固有状態を $v_{i\pm}$ とする. すなわち

$$(1) \quad S_i^2 v_{i\pm} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \hbar^2 v_{i\pm}$$

$$(2) \quad S_{iz} v_{i\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} v_{i\pm}$$

とする (いわば, $v_{\pm} \equiv \psi_{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}$). 演算子 $S = (S_x, S_y, S_z)$ を $S = S_1 + S_2$ と定義する.

1. 状態 $v_{1\pm} v_{2\pm}$ (複号同順でない) のうち, S^2, S_z の同時固有関数であるものはどれか. 式

$$(3) \quad 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+} + 2S_{1z} S_{2z}$$

が有用かもしれない ($S_{\pm} := S_x \pm \sqrt{-1}S_y$).

2. 上の spin 波動関数の適当な線形結合をとって, spin triplet, spin singlet の波動関数を作れ.

[2-2] 交換演算子

上の記号のもとで,

1. Spin triplet, spin singlet は, spin 交換演算子 $P_{12}^{\sigma} v_{1a} v_{2b} = v_{1b} v_{2a}$ の固有状態になっていることを示せ. 固有値は何か.

$$2. (4) \quad P_{12}^{\sigma} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\hbar^2} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

を, 右辺を実際に 4 つの状態に作用させてみることにより示せ. 式 (3) を用いるとよいかもしいない.

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[2-3] Schwinger の振動子 model による角運動量

2つの(結合していない)調和振動子 $+$, $-$ を考える. その昇降演算子を $a_{\pm}^{\dagger}, a_{\pm}$ と書く. 交換関係は $[a_{\pm}, a_{\pm}^{\dagger}] = 1$ (複号同順)なのだった. また, 結合していないことから, $[a_{+}, a_{-}] = [a_{+}^{\dagger}, a_{-}] = [a_{+}, a_{-}^{\dagger}] = [a_{+}^{\dagger}, a_{-}^{\dagger}] = 0$ である.

1. 演算子 $J_{\pm}(=: J_x \pm iJ_y), J_z$ を

$$(5) \quad J_{\pm} = \hbar a_{\pm}^{\dagger} a_{\mp},$$

$$(6) \quad J_z = (\hbar/2)(a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-})$$

により定義すると, これは, 通常角運動量代数の交換関係を満たすことを示せ.

2. 角運動量代数でいう J^2 を‘全個数演算子’ $N = N_{+} + N_{-}$ で表せ. ただし $N_{\pm} = a_{\pm}^{\dagger} a_{\pm}$.

3. 固有状態 $|jm\rangle$ と $|n_{+}n_{-}\rangle$ の対応を見つけよ. ただし, $N_{\pm}|n_{+}n_{-}\rangle = n_{\pm}|n_{+}n_{-}\rangle$.

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.