量子力学 II 演習 問題 (第 6 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 11 月 21 日

[6-1] Bloch の定理

1 次元を運動する粒子の量子力学を考える. 波動関数を $\psi(x)$ と書く.

1. 演算子

   (1) $T_a = \exp\left(i\frac{a}{\hbar}p\right)$

   が $-a$ の並進を表す演算子であること, すなわち

   (2) $T_a\psi(x) = \psi(x+a)$

   を示せ.

   Hint. 表示 $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ をとってもよい.

   Hint. あるいは, $\psi(x) = \int dy \psi(y)\delta(x-y)$ と位置固有関数 $\delta(x-y)$ の重ね合わせでかき, $[x,p] = i\hbar, [x, f(p)] = i\hbar f'(p)$ を用いてもよい.

2. 粒子が周期 a の周期的ポテンシャル $V(x)$ のもとで運動しているとする [1]5-2[5] :

   (3) $H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$, ただし $V(x+a) = V(x)$.

   これは, 格子定数 a の結晶の中を運動する電子のモデルである. この Hamiltonian H と並進演算子 T_a が可換であることを示せ.

3. Hamiltonian H と並進演算子 T_a が可換であるので, 同時固有関数 $\psi(x)$ が存在する. その $\psi(x)$ が, 周期 a の周期関数 $u(x)$ と実数 k を用いて

   (4) $\psi(x) = \mathrm{e}^{ikx}u(x)$

   と書けることを示せ. この事実を Bloch の定理という. 波数 k が $\bmod 2\pi/a$ でしか決まらないということが Brillouin zone の存在.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

Hint 並進演算子 T_a の固有値を A と書くと, $|A| = 1$ でなければならないことがいえる. すると, $A = \mathrm{e}^{ika}$ である.

[6-2] uncertainty relation

Hermite 演算子 A, B と任意の状態 $|\psi\rangle$ での期待値 $\langle\cdot\rangle = \langle\psi|\cdot|\psi\rangle$ に対して成立する不等式

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

を一般化された不確定性関係というのだった. ただし, $\Delta A = A - \langle A\rangle$.

1. Spin $\frac{1}{2}$ の系 $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ で, 演算子 S_z の固有状態 $|+\rangle, |-\rangle$ を考える:

   $$S_z |\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle.$$

   状態 $|\pm\rangle$ の一般の (規格化された) 線型結合について,

   $$\langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle$$

   一般化された不確定性関係の両辺を求めよ.

2. ある $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して

   $$\Delta A|\psi\rangle = \lambda\Delta B|\psi\rangle$$

   が成立するとする. 一般化された不確定性関係の, 等号が成立するためには, λ が純虚数であることが必要十分であることを示せ.

[6-3] 調和振動子の coherent 状態

1 次元の調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{5}$$

を考える. 昇降演算子 $b, b^\dagger$ は

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - (im\omega)^{-1}p) \tag{6}$$

$$b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + (im\omega)^{-1}p) \tag{7}$$

で定義され, $[b, b^\dagger] = 1$ をみたし, $H = \hbar\omega(b^\dagger b + 1/2)$ なのだった. H の固有状態を $|n\rangle$ と書く. ただし $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$.

消滅演算子 b の 固有状態 (H の固有状態とは限らない) を coherent 状態と言い, $|\psi_\lambda\rangle$ と書く. $\lambda \in \mathbf{C}$ は固有値:

$$b|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle \tag{8}$$

1. 状態

   (9)　$\exp(-|\lambda|^2/2)\exp(\lambda b^\dagger)\,|0\rangle$

   が正しく規格化された coherent 状態 $|\psi_\lambda\rangle$ であることを示せ. ただし, $|0\rangle$ は調和振動子の基底状態 $H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle$.

2. (10)　$|\psi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle$

   と展開するとき, $|f(n)|^2$ が Poisson 分布関数であることを示せ.

3. 状態 $\exp(ip\ell/\hbar)\,|0\rangle$ が coherent 状態であることを示せ. 演算子 b の固有値は何か. ただし, p は運動量演算子, ℓ は長さの次元を持つ実数.

4. 任意の状態は, uncertainty relation

   (11)　$\langle(\Delta x)^2\rangle \times \langle(\Delta p)^2\rangle \leq \hbar^2/4$

   を満たすが, coherent 状態に対しては特に等号 (minimum uncertainty relation) が成立することを示せ. ただし, 演算子 A に対して,

   $$\Delta A := A - \langle A\rangle$$

   記号 $\langle\cdot\rangle$ は, 考えている状態に関する期待値を表す: $\langle\cdot\rangle = \langle\psi|\cdot|\psi\rangle$.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.