量子力学 II 演習 問題 (第 7回)

樋口 さぶろお*

1996 年 11 月 28 日

[7-1]　1 次元の散乱問題

1 次元の potential のもとで, $x = -\infty$ の側から正の向きに入射する質量 m の粒子の散乱を考える:

$$(1) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 : \text{領域 I}) \\ V_0 > 0 & (0 \leq x \leq a : \text{領域 II}) \\ 0 & (x \geq a : \text{領域 III}) \end{cases} .$$

散乱されている粒子を表す波動関数 $\psi(x)$ は, 次を満たすと考えられる.

- Hamiltonian の固有関数である.
- $x \to -\infty$ での漸近形が, ある波数 $k > 0$ で $\psi(x) \sim A\exp[ikx] + B\exp[-ikx]$ である (ここで, $A\exp[ikx]$ が入射波, $B\exp[-ikx]$ が反射波を表す).
- $x \to +\infty$ での漸近形が, ある波数 $k > 0$ で $\psi(x) \sim C\exp[ikx]$ である (これは散乱波を表す. 粒子は負の方向から入射しているので, $D\exp[-ikx]$ のような成分はない).

1. Hamiltonian $H = p^2/2m + V(x)$ の固有値 E の固有関数を求めよ (領域 I, II, III にわけて考えよ).

Hint. 境界条件がないので, この段階では積分定数は決まらない.

2. 以下, $0 < E < V_0$ の場合を考える. 領域 III で x の正の方向に進む解 $\psi_{\mathrm{III}}(x) = C\mathrm{e}^{ikx}$ $(k > 0)$ を考えたとき, それに接続する領域 II での解を求めよ.

Hint. $x = a$ で, 波動関数とその微分の連続性が接続の条件.

3. 上で求めた領域 II での解を接続して領域 I の解を求めよ.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

4. 確率流れ密度は

$$(2) \quad j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)^* - \Psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right]$$

で定義されるのだった．$x \to \pm\infty$ での, 入射波, 反射波, 散乱波 (透過波) の確率流れ密度 $j_{\mathrm{i}}(x=-\infty), j_{\mathrm{r}}(x=-\infty), j_t(x=+\infty)$ をそれぞれ求めよ．

5. 反射係数 R, 透過係数 T を

$$(3) \quad R := \frac{|j_{\mathrm{r}}(x=-\infty)|}{|j_{\mathrm{i}}(x=-\infty)|}, T := \frac{|j_{\mathrm{t}}(x=+\infty)|}{|j_{\mathrm{i}}(x=-\infty)|}$$

と定義する．これらを求めよ．確率の保存 $R+T=1$ は成り立っているか.

[7-2]　1 次元での散乱問題

Potential が

$$(4) \quad V(x) = V_0 a\delta(x)$$

である場合に, 透過係数, 反射係数を求めよ．

Hint. $x=0$ で波動関数は, 0 階微分は連続だが, 1 階微分は不連続．その跳びの大きさは, Schrödinger 方程式の両辺を, $(-\epsilon, +\epsilon)$ で積分して求める．

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.