

量子力学 II 演習問題 (第9回)

樋口 さぶろお*

1996年12月12日

[9-1] 1次元の自由粒子の伝播関数

時間に依存しない Hamiltonian H のもとで時間発展する 1次元の粒子の波動関数 $\psi(x, t)$ を考える.

1. 時刻 t_0 での波動関数 $\psi(x, t_0)$ がわかっているとき, 任意の時刻 $t > t_0$ での波動関数は, 伝播関数 $K(x, t; y, t_0)$ を用いて

$$(1) \quad \psi(x, t) = \int dy K(x, t; y, t_0) \psi(y, t_0)$$

で与えられることを示せ. ただし, 伝播関数 $K(x, t; y, t_0)$ は

$$(2) \quad K(x, t; y, t_0) = \sum_j \phi_j(x) \phi_j^*(y) \exp(-iE_j(t - t_0)/\hbar).$$

ただし, $\{\phi_j(x)\}_{j=1,2,\dots}$ は, H の固有関数からなる正規直交完全系, E_j は ϕ_j の固有値.

2. 伝播関数 $K(x, t; y, t_0)$ が, $K(x, t; y, t_0) = \langle x, t | y, t_0 \rangle$ であることを示せ. ただし, $\psi(x, t) = \langle x | \exp[-iHt/\hbar] | \psi \rangle$ であることに注意.
3. 伝播関数 $K(x, t; y, t_0)$ が微分方程式

$$(3) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} H(x) \right] K(x, t; y, t_0) = \delta(x - y) \delta(t - t_0)$$

を満たす Green 関数であることを示せ.

Hint. 右辺の δ -関数は, $t < t_0$ で $K(x, t; y, t_0) = 0$ よって $\psi(x, t) = 0$ となるように加えてある. ここでは, $t > t_0$ の場合のみ考えればよい. つまり右辺の δ -関数は 0 だと思ってもよい.

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

4. 自由粒子 $H = -(\hbar^2/2m)(d^2/dx^2)$ のとき,

$$(4) \quad K(x, t; y, t_0) = m^{1/2}(2\pi i\hbar(t - t_0))^{-1/2} \exp\left(\frac{im(x - y)^2}{2\hbar(t - t_0)}\right)$$

であることを示せ.

5. (任意の potential に対し) 粒子が時刻 t_0 に y で観測された場合に時刻 t に x で観測される条件付確率密度が $|K(x, t; y, t_0)|^2$ で与えられることを説明せよ. この意味で, $K(x, t; y, t_0) = \langle x, t | y, t_0 \rangle$ であり, transition amplitude (遷移振幅) ともいう.

6. 自由粒子の, 運動量空間での伝播関数 $\langle p, t | p, t_0 \rangle$ を求めよ.

7. (任意の potential に対し) この系の '分配関数' を,

$$(5) \quad Z(\beta) := \int dx K(x, t; x, 0) \Big|_{t=-i\beta\hbar}$$

と定義する. このとき, 系の基底エネルギー E_0 が

$$(6) \quad E_0 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial Z(\beta)}{\partial \beta}$$

と書けることを示せ.

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.