# 量子力学 II 演習 問題 (第 14回)

樋口 さぶろお*

1997年1月30日

## お知らせ

- 今回の問題をレポートとして解く人は, 2月5日 (水) までに提出して下さい.
- 2月12日 (水) までに, 点検した答案と解答をお返しします. 4-413 B の前にとりに来て下さい.
- 2月12日 (水) までに, 成績に関する掲示を 4-413 B の前にする予定です.

### [14-1] Virial 定理

Hamiltonian

$$H = K + V, \qquad K = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \qquad V = V(\mathbf{x})$$

に従う 3次元の粒子を考える.

1. 交換子 $[\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}, H]$ を計算することにより,

   (1) $$\frac{d}{dt}\langle\psi|\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}|\psi\rangle = \left\langle \psi \left| \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right| \psi \right\rangle - \langle\psi|\mathbf{x}\cdot\nabla V|\psi\rangle$$

   を示せ. ただし, $\psi$ は任意の状態.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

2. 状態 $\psi$ が Hamiltonian の固有状態であるとき, 式 (1) の左辺が zero になることを示せ.

*Remark.* 古典力学における Virial 定理とは, $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ が有界であり, $\bar{(\cdot)}$ が, 一周期 (周期運動の場合), または十分長い時間 (非周期運動の場合) にわたる平均を表すと

$$(2) \quad \overline{\mathbf{p}^2/m} = \overline{\mathbf{x} \cdot \nabla V}$$

が成立するというものだった. 上で求めた式は, その量子力学版といえる.

3. 状態 $\psi$ が Hamiltonian の固有状態であり, かつ $V(\mathbf{x}) \propto |\mathbf{x}|^n$ のとき,

$$(3) \quad \langle\psi|K|\psi\rangle = \frac{n}{2}\langle\psi|V|\psi\rangle$$

を示せ. ただし, $K, V$ はそれぞれ運動, ポテンシャルエネルギー.

*Remark.* 式 (3) は, 例えば, 調和振動子, 水素原子の任意の状態について成り立つ関係式であり, 強力である.

### [14-2]　Virial 定理

3 次元の Hamiltonian

$$H = K + V, \qquad K = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \qquad V = C|\mathbf{x}|^n$$

を考える. 波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ を $H$ の固有関数のひとつとする.

1. 波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ が規格化されているとき, 波動関数 $\psi(\lambda\mathbf{x})$ を規格化せよ ($\lambda > 0$).

2. 規格化された $\psi(\lambda\mathbf{x})$ を $\psi_\lambda(\mathbf{x})$ とかく. すなわち, $\psi_1 = \psi$. 期待値 $\langle\psi_\lambda|K|\psi_\lambda\rangle$, $\langle\psi_\lambda|V|\psi_\lambda\rangle$ を, $\langle\psi|K|\psi\rangle$, $\langle\psi|V|\psi\rangle$ で表せ.

3. $\langle\psi_\lambda|H|\psi_\lambda\rangle$ は, $\lambda$ の関数とみたとき, $\lambda = 1$ で極小になる (これは, $\psi_{\lambda=1}$ が真の固有関数なので, 変分原理より示せる) このことを用いて,

$$\langle\psi|K|\psi\rangle = \frac{n}{2}\langle\psi|V|\psi\rangle$$

を示せ.

## [14-3] Aharonov-Bohm 効果

円筒殻

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\rho_a^2<x^2+y^2<\rho_b^2, 0<z<L\}$$

の中に閉じ込められた電子を考える.

1. エネルギー固有関数をみつけ, エネルギー固有値が

$$E_{\ell mn}=\frac{\hbar^2}{2m}\left[k_{mn}^2+\left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2\right],\quad (\ell,n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

であることを示せ. $k$ についての方程式

$$J_m(k\rho_b)N_m(k\rho_a)-N_m(k\rho_b)J_m(k\rho_a)=0$$

の解を $0<k_{m1}<k_{m2}<\cdots$ とする.

*Hint.* $(r,\theta)$ と $z$ に変数分離. $(r,\theta)$ 方向は円板の問題と似ていて, さらに $r$ と $\theta$ に変数分離し, $r$ 方向について Bessel 方程式が出る. $z$ 方向は 1 次元の箱型ポテンシャルの問題.

*Hint.* Bessel 方程式

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}f(z)+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)f(z)=0$$

の解は, $n$ 次の Bessel 関数 $J_n(z)$ と Neumann 関数 $N_n(z)$ の線型結合.

2. $z$-軸に平行で大きさが $B$ である一様な静磁場が, 領域 $0\leq x^2+y^2<\rho_a^2$ に加わっているとき, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を求めよ.

*Hint.* Stokes の定理.

3. 磁場のある場合にエネルギー固有関数, 固有値を求めよ.

*Hint.* ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ があるときの Hamiltonian は, 運動量演算子 $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p}+e\mathbf{A}(\mathbf{x})$ におきかえればよいのだった. ただし, いま電子の電荷を $-e$ とした.

*Remark.* 電子は磁場に'触れていない'のに, エネルギー準位は影響を受けることに注意.

4. 円筒殻の内側を通る磁束が,

$$\pi\rho_a^2 B = \frac{2\pi N\hbar}{e} \qquad (N \in \mathbb{Z})$$

をとる時には, 系の基底エネルギーは $B = 0$ の時と同じであることを示せ.

## 参考文献


[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.