量子力学 II 演習 問題 (第 1回)

樋口 さぶろお*

1997 年 10 月 13 日

はじめに　この演習では, 問題を解くことを通して, 講義 ‘量子力学 II’ の内容を復習します. したがって, ‘量子力学 II’ の内容を一通り通過していることを前提とします. 多くの人は, 文献 [1] に基づく吉岡先生の ‘量子力学 II’ の授業を受けたことと思います.

教科書　プリントを配布します. 問題の一部は, 量子力学 II の教科書 [1] に基づきます.

評価　出席回数, 授業中に解いた問題, レポートなどにより判定します. 出席重視. 試験は行わない予定.

通知　この演習に関する通知は, 4 号館 413B 号室の前の壁, および

URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm2/`

で行ないます. 必ずしも 4 号館の入口の掲示板は用いないので注意して下さい.

演習の進め方

- 授業の最初に, 黒板で, その日に扱う事項のまとめと, 例題の解説をします.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

- 残りの授業時間内にいくつかの問題をレポート用紙 (A4 だと助かる) に解いて提出してください. たくさん解けなかった場合でも, 授業中に物理を考えていたことがわかるように何か書いて提出して下さい. これで出席とします.
- 金曜日の朝までに, 暇と興味に応じて好きなだけ問題を解いて, レポートとして 413B の前のポストに提出して下さい. 授業中に解いた分とあわせて, 1 (大) 問以上解くようにして下さい.
- 次回に解答を配り, 間に合えばレポートを返却します.

復習: 1 次元の調和振動子

位置, 運動量演算子をそれぞれ x, p ($[x,p] = i\hbar$, あるいは $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ と思ってもよい) とする. 調和振動子の Hamiltonian は,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である ($m, \omega \in \mathbb{R}$).

これを解くのに (i.e. 束縛状態や期待値を求めるのに), 昇降演算子

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - (im\omega)^{-1}p), \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + (im\omega)^{-1}p)$$

と定義するとよい. これらは次の関係を満たす.

(1) b と $b^\dagger$ は hermite 共役.

(2) $H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega/2$.

(3) $[b, b^\dagger] = 1$.

(4) H の固有状態 $|n\rangle$ は, $b^\dagger b\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ で特徴づけられる. $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(5) $b\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-n\rangle\,, b^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,.$

例題

行列要素 $\langle 0|x^2|n\rangle$ を計算せよ.

[1-1]　昇降演算子を用いた期待値の計算

1. 期待値 $\langle 1|x|1\rangle, \langle 1|x^2|1\rangle$ を求めよ.
2. 行列要素 $\langle 1|p|n\rangle, \langle 0|p^2|n\rangle$ を求めよ.

[1-2]　Hermite polynomials

1. 波動関数

$$C \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right]$$

   が, 調和振動子の (定常状態の) Schrödinger 方程式を満たし, 基底状態 $n = 0$ すなわち $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ に対応することを示せ. ただし, $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

2. 規格化定数 C を決定せよ.
3. 演算子 $b^\dagger$ を作用させ, $n = 1$ に対応する波動関数 $\psi_1(x) = \langle x|1\rangle$ を求めよ.
4. x 積分によって, 期待値 $\langle 0|x^2|0\rangle$ を求めよ.

[1-3]　昇降演算子の性質

上であげた $b, b^\dagger, H$ の性質のうち, できるだけ多くのものを証明せよ. 最後のものについては, 次の常套手段を用いてもよい.

1. 交換関係を用いて, $(b^\dagger b)b^\dagger|n\rangle = (n+1) \times b^\dagger|n\rangle$ をいう. これで, $b^\dagger|n\rangle = C|n+1\rangle$ をいったことになる.
2. 次に規格化条件から 比例定数 C を決める.

[1-4]　調和振動子の coherent 状態

1 次元の調和振動子を考える. 消滅演算子 b の 固有状態 (H の固有状態とは限らない) を coherent 状態と言い, $|\psi_\lambda\rangle$ と書く. $\lambda \in \mathbb{C}$ は固有値:

$$b\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle \tag{6}$$

1. 状態

   $$\exp(-|\lambda|^2/2)\exp(\lambda b^\dagger)\,|0\rangle \tag{7}$$

   が正しく規格化された coherent 状態 $|\psi_\lambda\rangle$ であることを示せ. ただし, $|0\rangle$ は調和振動子の基底状態 $H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle$.

2.

   $$|\psi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle \tag{8}$$

   と展開するとき, $|f(n)|^2$ が Poisson 分布関数であることを示せ.

3. 状態 $\exp(ip\ell/\hbar)\,|0\rangle$ が coherent 状態であることを示せ. 演算子 b の固有値は何か. ただし, p は運動量演算子, ℓ は長さの次元を持つ実数.

4. 任意の状態は, uncertainty relation

   $$\langle(\Delta x)^2\rangle \times \langle(\Delta p)^2\rangle \leq \hbar^2/4 \tag{9}$$

   を満たすが, coherent 状態に対しては特に等号 (minimum uncertainty relation) が成立することを示せ. ただし, 演算子 A に対して,

   $$\Delta A := A - \langle A\rangle$$

   記号 $\langle\cdot\rangle$ は, 考えている状態に関する期待値を表す: $\langle\cdot\rangle = \langle\psi|\cdot|\psi\rangle$.

Remark. このことから, 状態 $|\psi_\lambda\rangle$ は, 位置 $\langle\psi_\lambda|x|\psi_\lambda\rangle$ を, 運動量 $\langle\psi_\lambda|p|\psi_\lambda\rangle$ で運動する波束とみなせる.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.