量子力学 II 演習 問題 (第 2回)

樋口 さぶろお*

1997 年 10 月 20 日

非定常状態の摂動論

時間に依存していない非摂動 Hamiltonian H_0 に時間に依存する摂動 $\lambda V(t)$ が加わって $H = H_0 + \lambda V(t)$ となったとする ($\lambda \ll 1$). 波動関数 $\Psi(x,t)$ に対する Schrödinger 方程式は

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [H_0 + \lambda V(t)]\Psi.$$

波動関数 $\Psi(x,t)$ を, 非摂動 Hamiltonian H_0 の固有関数 $\psi_s(x)$ (エネルギー固有値 E_s) で

$$(2) \quad \Psi(x,t) = \sum_s a_s(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_s t\right)\psi_s(x)$$

と展開する. このとき a_s の時間発展を決める方程式は

$$(3) \quad \frac{da_s(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\sum_j a_j(t)\lambda\langle\psi_s|V(t)|\psi_j\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_j - E_s)t\right)$$

である.

とくに, 時刻 $t=0$ で系が状態 ψ_n にあったとき, 摂動の 1 次で

$$(4) \quad a_s(t) = \delta_{sn} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\lambda\langle\psi_s|V(t')|\psi_n\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_s)t'\right).$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

例題

1 次元の調和振動子

$$(5)\quad H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

考える. 生成消滅演算子は $b,b^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x\pm\frac{ip}{m\omega}\right)$ で定義されるのだった.
時刻 $t<0$ では, 系は基底状態にあったとする. 時刻 $t\geq 0$ で摂動として, 力

$$(6)\quad F(t)=\lambda F_0\exp[-t/\tau]$$

が加わったとする ($F_0,\tau\in\mathbb{R}$ は定数). 時刻 $t\geq 0$ で系が第 1 励起状態にある確率を求め, 極限 $t\to\infty$ でこの確率がある値に収束することを示せ. 1 次の摂動論の範囲で, 第 2 以上の励起状態への遷移は起こるか.

[2-1] 指数関数的に減少する力

1 次元の調和振動子を考える. 系は $t<0$ では基底状態にあった. $t>0$ で時間に依存する摂動

$$(7)\quad \lambda V(x,t)=\lambda Ax^2\exp[-t/\tau]$$

が加わったとする.
十分時間が経過したとき ($t\gg\tau$), 系が各励起状態にある確率を, 時間に依存する摂動論の 1 次で求めよ.

[2-2] 周期的に変化する摂動

1 次元の調和振動子時刻 $t<0$ では系は基底状態にあった. 時刻 $t>0$ で摂動 potential

$$(8)\quad V(t)=\lambda F_0x\cos\omega' t$$

が加わった. 期待値 $\langle x\rangle$ の時間変化を摂動論で求めよ. その計算は $\omega'\simeq\omega$ でも正しいか考えよ.

[2-3] $|t| \to \infty$ **でなくなる摂動**

1 次元の調和振動子を考える．時刻 $t < 0$ では系は基底状態にあった．すべての時刻 $-\infty < t < +\infty$ で力

$$F(t) = \lambda \frac{F_0}{\tau\omega} \frac{1}{\tau^2 + t^2} \tag{9}$$

が摂動として加わっている．ここで, F_0, τ は力と時間の次元を持つ定数．

時刻 $t = -\infty$ で系が基底状態にあったとする．時刻 $t = +\infty$ で系が第一励起状態にある確率を求めよ．

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.