

量子力学 II 演習問題 (第 8 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 12 月 15 日

Spin

Spin- $\frac{1}{2}$ の spin 演算子 $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ は, 角運動量演算子 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ で, 全角運動量に制限 $\mathbf{S}^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2})\hbar^2$ を課したもの. したがって, 交換関係は, 角運動量と同様に

$$(1) \quad [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \text{ cyclic permutation.}$$

S_z の固有状態は $2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$ 個あり, これを ψ_{\pm} とすると

$$(2) \quad S_z \psi_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \hbar \psi_{\pm}, \quad \mathbf{S}^2 \psi_{\pm} = \frac{3}{4} \hbar^2 \psi_{\pm}.$$

昇降演算子 $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ を導入すると,

$$(3) \quad S_{\mp} \psi_{\pm} = \hbar \psi_{\mp}, \quad S_{\pm} \psi_{\pm} = 0.$$

例題

Spin- $\frac{1}{2}$ を考える.

1. S_z の $\pm \frac{1}{2} \hbar$ の固有状態をそれぞれ,

$$(4) \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

という表示をとる. このとき, $S_{\pm} = S_x \pm iS_y, S_z$ を 2×2 行列表示せよ. これから, S_x, S_y の行列表示を求めよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
Komaba bldg 16, room 809B, Hikami Lab., Phone: (03)54.54.67.35

2. S_y の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ. 規格化されたスピン状態

$$(5) \quad a\psi_+ + b\psi_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

に対して, S_y を測定した時, 結果として $+\hbar/2$ を得る確率はどれだけか.

Hint. ベクトル $a\psi_+ + b\psi_-$ を S_y の固有ベクトルの線型結合として書く.

[8-1] スピン

1. 電子の z 方向のスピンを測定し, 上向き ($S_z = +\hbar/2$) の電子だけを透過させるようなフィルターがある. 電子線を, このフィルターを通し, その後, x 方向のスピンを測定する. どのような状態がどのような確率で得られるか.
2. 同様に, フィルター透過後, z -軸と θ の角をなす z' -軸に平行なスピンを測定した場合にはどうか.

Hint. z' -軸方向の単位 vector を $e_{z'}$ とすると, 演算子 $S \cdot e_{z'}$ に対応する物理量を測定したことになる.

[8-2] スピン歳差運動

スピンは磁気双極子モーメントをもつ. いま, spin- $\frac{1}{2}$ を考え, その磁気双極子モーメントが $e\hbar/2mc$ であるとする. 磁場 B との相互作用は, Hamiltonian

$$(6) \quad H = -\frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

で与えられる. z 軸方向の一様磁場 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ の場合は単に

$$(7) \quad H = -\frac{eB}{mc} S_z$$

となる.

1. この系のエネルギー固有値, 固有状態を求めよ.
2. 時刻 $t = 0$ で, 系は S_x の, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の固有状態にあったとする. 時刻 t での S_x の期待値 $\langle S_x \rangle$ を求めよ.
3. 同様に, 時刻 t での S_y, S_z の期待値 $\langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle$ を求めよ.

[8-3] Stern-Gerlach の実験

Spin- $\frac{1}{2}$ の粒子の ビームを, 順に次の 3 つの filter を通す.

フィルター 1 S_z を測定し, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の粒子だけを通す.

フィルター 2 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ を測定し, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の粒子だけを通す. ただし, \mathbf{n} は, z -軸の正の方向から x -軸の正の方向に角度 θ だけ離れた方向の単位 vector.

フィルター 3 S_z を測定し, 固有値 $-\frac{1}{2}\hbar$ の粒子だけを通す.

フィルター 1 を通過した粒子が, すべてのフィルターを通過する確率を求めよ.

[8-4] スピン

Spin- $\frac{1}{2}$ が, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ の, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の固有状態にある. ただし, \mathbf{n} は, z -軸の正の方向から x 軸の正の方向に θ だけ離れた方向の単位 vector.

1. S_x を測定した時に, 結果が $+\frac{1}{2}\hbar$ となる確率を求めよ.
2. S_x の分散

$$(8) \quad \langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \rangle$$

を求めよ.

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).
訳書は吉岡書店.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書
は吉岡書店.